Midtoets Vectoranalyse

29 mei 2007, 9.00-11.00 uur

De toets bestaat uit de onderstaande **drie** opgaven. Bij elk van de opgaven is het maximale aantal voor deze opgave te behalen punten vermeld. Je krijgt 10 punten gratis.

Opgave 1 (30 pt.)
Gegeven is de bol S in $\mathbb{R}^3$ met vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

1. Het punt (x_0, y_0, z_0) ligt op S. Toon aan dat het raakvlak aan S in dit punt gegeven wordt door de vergelijking
$$x_0\, x + y_0\, y + z_0\, z = 1.$$
2. Bepaal de punten van S waarin het raakvlak door het punt $(0, 0, 2)$ gaat en evenwijdig is aan de x-as.

Opgave 2 (30 pt.)
Laat $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een C^2-functie zijn, en laat $z = g(x, y)$. Via $x = e^r \cos\theta$ en $y = e^r \sin\theta$ wordt z een functie van (r, θ).

1. Druk de partiële afgeleiden $\frac{\partial z}{\partial r}$ en $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ uit in de partiële afgeleiden $\frac{\partial g}{\partial x}$ en $\frac{\partial g}{\partial y}$.
2. Gebruik dit resultaat om $\frac{\partial g}{\partial x}$ en $\frac{\partial g}{\partial y}$ uit te drukken in $\frac{\partial z}{\partial r}$ en $\frac{\partial z}{\partial \theta}$.
3. Toon vervolgens aan dat
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = e^{-2r} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \right).$$

Opgave 3 (30 pt.)
Het oppervlak S in $\mathbb{R}^3$ is gegeven door de vergelijking

$$f(x,y,z)=0,$$

waarbij $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ een C^2-functie is. In het punt $p_0=(x_0,y_0,z_0)$, dat op S ligt, geldt

$$\nabla f(p_0)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

1. Toon aan dat S in de buurt van p_0 geschreven kan worden als grafiek van een C^1-functie g, d.w.z.,

$$z=g(x,y),$$

   waarbij $z_0=g(x_0,y_0)$.

2. Toon aan dat (x_0,y_0) een kritiek punt van g is (via impliciet differentiëren).

3. Je mag aannemen dat de functie g uit onderdeel 1 een C^2-functie is. Verder is gegeven:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0)-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(p_0)^2>0.$$

   Toon het volgende aan: als $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0)<0$, dan heeft g een lokaal minimum in (x_0,y_0), en als $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0)>0$, dan heeft g een lokaal maximum in (x_0,y_0).